

ЛАТВИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

МЕХАНИКА КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

УДК 539.3

П. Я. Носатенко

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТА СВОБОДНОГО КРАЯ В ПЕРЕКРЕСТНО АРМИРОВАННЫХ ОБОЛОЧКАХ

Эффект концентрации напряжений на границе слоев у свободной поверхности перекрестно армированного композита (получивший в литературе название «кромочного» [1, 2]), являясь одной из важнейших причин разрушения конструкций, неоднократно подвергался анализу как с использованием численных методов (подробный обзор соответствующих работ дан в [3]), так и на основе упрощенных подходов [1, 2]. В обоих случаях рассматривалась задача об обобщенной плоской деформации бесконечно протяженной полосы. Настоящая работа посвящена исследованию аналогичного эффекта в перекрестно армированных оболочках вращения на основе конечно-элементного решения осесимметричной задачи теории упругости. При выборе подхода учитывалось, что метод конечных элементов (МКЭ) позволил наиболее достоверно описать эффекты у свободного края в полосе, чему имеются экспериментальные подтверждения [4].

Рассмотрим оболочку вращения, отнесенную к триортогональным координатам $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, из которых первые две — суть линии главных кривизн внутренней поверхности (α_1 — меридиан), а ось α_3 направлена по внешней нормали к α_1, α_2 . Оболочка получена перекрестной выкладкой однонаправленно армированных слоев под углами $(-1)^{n+1}\gamma$ (угол армирования γ образован направлением армирования и касательной к меридиану, n — номер слоя, отсчитываемый от внутренней поверхности). Каждый слой в осях, связанных с направлением армирования, считается трансверсально-изотропным, и его механические характеристики определяются по известным формулам усреднения [5]. В координатах $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ такой слой является цилиндрически анизотропным с одной плоскостью упругой симметрии — касательной к поверхности, эквидистантной к координатной, а матрица жесткости C обобщенного закона Гука

$$[\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}]^T = C[\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}]^T \quad (1)$$

содержит 13 различных ненулевых компонент.

Для упругих постоянных n -го и $(n+1)$ -го слоев в силу особенности внутреннего строения оболочки выполняются равенства

$$C_{ii}^{(n+1)} = C_{ii}^{(n)}; \quad C_{jk}^{(n+1)} = C_{jk}^{(n)}; \quad C_{j6}^{(n+1)} = -C_{j6}^{(n)}; \\ C_{45}^{(n+1)} = -C_{45}^{(n)}; \quad i=1, 2, \dots, 6; \quad j, k=1, 2, 3. \quad (2)$$

Именно различия в знаках компонент C_{j6} и C_{45} смежных слоев вызывают эффекты неоднородности полей напряжений и деформаций, при этом на границе слоев имеют место следующие условия непрерывности:

$$u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)}; \quad \sigma_{i3}^{(n+1)} = \sigma_{i3}^{(n)}; \quad \varepsilon_{kl}^{(n+1)} = \varepsilon_{kl}^{(n)}; \\ i=1, 2, 3; \quad k, l=1, 2. \quad (3)$$

Численное решение задачи анизотропной теории упругости осуществляется на основе алгоритма AAMS [6], реализующего в глобальной цилиндрической системе координат МКЭ в форме метода перемещений с использованием кольцевых треугольного сечения конечных элементов (КЭ) с линейной локальной аппроксимацией

$$u_i^e = \alpha_{3i-2}^e + \alpha_{3i-1}^e r + \alpha_{3i}^e z; \quad t=r, \theta, z \rightarrow i=1, 2, 3. \quad (4)$$

При произвольной форме меридиана материал каждого слоя оболочки в цилиндрических координатах является цилиндрически анизотропным общего вида, а на границе слоев условия непрерывности выполняются лишь для перемещений $u_t^{(n+1)} = u_t^{(n)}$ ($t=r, \theta, z$). Эти условия при использовании в МКЭ аппроксимаций (4) выполняются во всей области решения автоматически.

Напряженно-деформированное состояние вычисляется для каждого КЭ в узлах дискретной модели после определения вектора узловых перемещений из решения конечно-элементного эквивалента уравнений равновесия

$$K_L U = Q, \quad (5)$$

где $U = [u_r^1, u_\theta^1, u_z^1, \dots, u_r^N, u_\theta^N, u_z^N]^T$. В соотношениях (5) для линейной матрицы жесткости K_L и вектора приведенных нагрузок Q получены аналитические зависимости, точные в рамках аппроксимации (4); N — общее количество узлов сетки. На следующем этапе производится преобразование найденных напряжений и деформаций к координатам $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и усреднение их узловых значений по формулам

$$\sigma_{ij}^{[m]} = \frac{1}{M} \sum_{e \in m} (\sigma_{ij}^e)^{[m]}; \quad \epsilon_{kl}^{[m]} = \frac{1}{M} \sum_{e \in m} (\epsilon_{kl}^e)^{[m]}.$$

Здесь суммирование проводится по M элементам e , содержащим узел m , для $i=1, 2, 3; j=3$ и $k, l=1, 2$ — во всей области (учитывая условия непрерывности (3)), для остальных компонент напряжений и деформаций, терпящих разрыв на границе слоев, — в области каждого слоя.

Отметим, что условиям на свободном торце ($\alpha_1 = \alpha_1^*$)

$$\sigma_{11}(\alpha_1^*, \alpha_3) = \sigma_{12}(\alpha_1^*, \alpha_3) = \sigma_{13}(\alpha_1^*, \alpha_3) = 0 \quad (6)$$

в дискретной модели эквивалентно равенство нулю соответствующих компонент вектора Q в (5). Интегральное выполнение условий (6) по толщине

$$\int_0^H \sigma_{1i}(\alpha_1^*, \alpha_3) d\alpha_3 = 0; \quad i=1, 2, 3 \quad (7)$$

использовалось в [3] для контроля конечно-элементного решения, при этом было показано, что выполнение равенств (7) обеспечивается при различных типах КЭ на достаточно грубых сетках.

Учитывая тот факт, что в зоне свободного края на границе слоев наблюдается сингулярность напряженно-деформированного состояния, характеризуемого большой изменчивостью как по толщине, так и вдоль меридиана, а сходимость МКЭ может быть проверена лишь для перемещений, с целью дополнительного контроля определяемых численно значений напряжений введем условие, следующее из интегрального выполнения третьего уравнения обобщенного закона Гука (1), представленного в обращенной форме

$$\int_0^H \epsilon_{33}(\alpha_1^*, \alpha_3) d\alpha_3 = \int_0^H [a_{23}\sigma_{22}(\alpha_1^*, \alpha_3) + a_{33}\sigma_{33}(\alpha_1^*, \alpha_3)] d\alpha_3. \quad (8)$$

Здесь окружные напряжения $\sigma_{22}(\alpha_1^*, \alpha_3)$ и поперечные деформации

$$\epsilon_{33}(\alpha_1^*, \alpha_3) = du_3(\alpha_1^*, \alpha_3)/d\alpha_3 \quad (9)$$

на границе слоев имеют точки разрыва, коэффициенты a_{23} и a_{33} матрицы податливости, как и соответствующие компоненты матрицы S (2), для перекрестно армированной оболочки постоянны по толщине.

Проведя интегрирование в (8) с учетом (9), получаем, что для точного решения задачи теории упругости справедливо равенство

$$u_3(\alpha_1^*, H) - u_3(\alpha_1^*, 0) = a_{23}T_{22} + a_{33} \int_0^H \sigma_{33}(\alpha_1^*, \alpha_3) d\alpha_3. \quad (10)$$

Величина $\Delta u = u_3(\alpha_1^*, H) - u_3(\alpha_1^*, 0)$ суть изменение толщины оболочки на свободном крае. В правой части (10) эта же величина (обозначим ее $\Delta \sigma$) вычисляется через значения напряжений, при этом T_{22} есть обычное для теории тонкостенных оболочек удельное окружное усилие, определяемое без учета изменения метрики по толщине оболочки [7]. Таким образом, интегрально погрешность численно определяемых напряжений σ_{33} на свободном крае можно характеризовать величиной

$$\delta = |(\Delta u - \Delta \sigma) / \Delta u|. \quad (11)$$

Анализ напряженного состояния выполним на примере двухслойной борозпоксидной цилиндрической оболочки (механические характеристики структурных составляющих $E_f = 4,2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu_f = 0,21$; $E_m = 3,5 \times 10^3$ МПа; $\nu_m = 0,33$; объемный коэффициент армирования $\psi = 0,5$), ранее подробно рассмотренной в работах [6, 8] при изучении эффекта анизотропии. Оболочка по одному из торцов жестко заделана и нагружена внутренним давлением $p = 1$ МПа, как показано на рис. 1. Геометрические размеры оболочки $L = 100$ мм; $R = 100$ мм; $H = 5$ мм таковы, что влияние краевого эффекта от закрепления можно не принимать во внимание при исследовании эффектов на свободном торце [7] ($L/\sqrt{RH} \gg 2$).

При триангуляции области решения учитывалось влияние изменяемости искомых функций на сходимость МКЭ [9]. Наилучшие результаты с точки зрения оценки (11) для оболочки с углами армирования $\gamma = \pm 30^\circ$ получены при использовании 3500 КЭ (количество узлов $N = 1846$, число степеней свободы 5538) на неравномерной сетке с отношениями длин катетов КЭ к толщине оболочки от $h_{\min}/H = 0,004$ до $h_{\max}/H = 0,6$ (сгущения

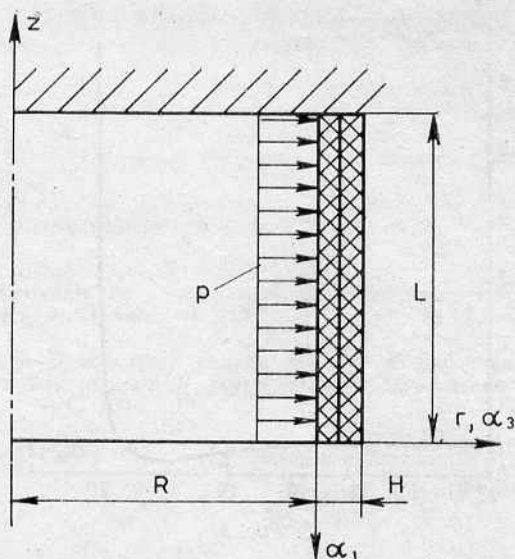


Рис. 1.

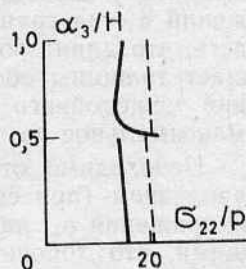


Рис. 3.

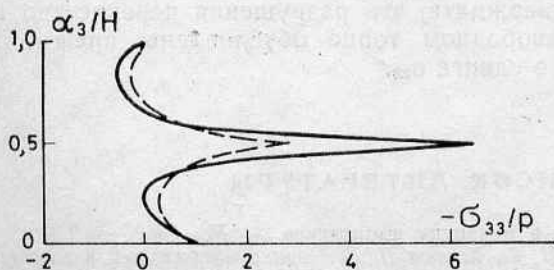


Рис. 2.

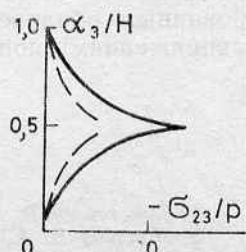


Рис. 4.

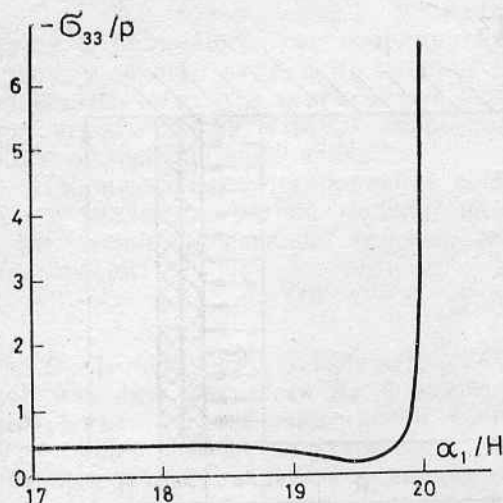


Рис. 5.

вые — $\gamma = \pm 30^\circ$. Отметим, что при близком характере изменения напряжений σ_{33} и σ_{23} для обоих значений угла армирования в случае $\gamma = \pm 45^\circ$ эффект концентрации поперечных составляющих напряжений на границе слоев выражен в значительно большей степени. Этим, по-видимому, объясняется тот факт, что величина δ (11) при $\gamma = \pm 45^\circ$ составила $\delta = 0,39$ ($\Delta_u = -2,600 \cdot 10^{-3}$ мм; $\Delta_\sigma = -1,585 \cdot 10^{-3}$ мм) и не могла быть улучшена при попытках дальнейшего сгущения сетки КЭ. Увеличение угла армирования приводит к качественным и количественным изменениям в распределении напряжений σ_{22} по толщине на свободном торце оболочки. Так, если для $\gamma = \pm 30^\circ$ напряжения σ_{22} распределены линейно в каждом слое и характер их изменения близок к безмоментному (окружное усилие почти совпадает с вычисленным по безмоментной теории: $T_{22}/[p(R+H/2)] = 1,013$), то для $\gamma = \pm 45^\circ$ напряжения в наружном слое распределены существенно нелинейно по толщине, при этом величина окружного усилия значительно меньше ($T_{22}/[p(R+H/2)] = 0,725$).

Представляет практический интерес и характер затухания краевого эффекта у свободного края. На рис. 5 представлено изменение напряжений σ_{33} на границе слоев вдоль меридиана для $\gamma = \pm 45^\circ$. Легко видеть, что длина зоны краевого эффекта для напряжений σ_{33} не превышает толщины оболочки. Аналогичен и характер изменения напряжений межслойного сдвига σ_{23} (на расстоянии $2H$ от свободного края максимальное по абсолютной величине значение $|\sigma_{23}| = 0,0384p$).

Необходимо отметить, что при нагружении оболочки внутренним давлением (при ее растяжении в окружном направлении) поперечные напряжения σ_{33} на границе слоев у свободного края являются сжимающими, что хорошо согласуется с результатами, обсуждаемыми в [3, 4], где аналогичный результат получен для растяжения двухслойной полосы. Это позволяет утверждать, что разрушения перекрестно армированных оболочек на свободном торце обусловлены прежде всего напряжениями поперечного сдвига σ_{23} .

сетки проводили в зонах свободного края, закрепления, поверхности приложения нагрузки и границы слоев). Изменения толщины, вычисляемые через значения перемещений и напряжений, при этом составили $\Delta_u = -5,120 \cdot 10^{-3}$ мм, $\Delta_\sigma = -5,122 \cdot 10^{-3}$ мм соответственно (относительная погрешность (11) $\delta = 0,00039$). Эта же сетка использована и для расчета оболочки с углами армирования $\gamma = \pm 45^\circ$ (именно такой способ армирования наиболее подробно обсужден в [3]). На рис. 2...4 показаны распределения напряжений по толщине оболочки на свободном крае. Сплошные линии соответствуют $\gamma = \pm 45^\circ$, штриховые — $\gamma = \pm 30^\circ$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. — М., 1982. — 336 с.
2. Поляков В. А., Жигун И. Г., Хитров В. В. Оценка напряжений в зоне кромочного эффекта при растяжении слоистых композитов // Механика композит. материалов. — 1987. — № 5. — С. 787...796.

3. Whitcomb J. D., Raju I. S., Goree J. G. Reliability of the finite-element method for calculating free-edge stresses in composite laminates // Computer and structure. — 1982. — Vol. 15, N 1. — P. 23...37.

4. Herakowich C. T., Post D., Buczek M. B., Czarnek R. Free-edge strain concentrations in real composite laminates: Experimental-theoretical correlation // Trans. ASME. J. Appl. Mech. — 1985. — Vol. 52, N 4. — P. 787...793.

5. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление жестких полимерных материалов. — Рига, 1972. — 498 с.

6. Григолюк Э. И., Носатенко П. Я. К эффекту анизотропии в перекрестно армированных оболочках // Проблемы механики деформируемого твердого тела. — Калинин, 1986. — С. 120...129.

7. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. — Л., 1951. — 344 с.

8. Куликов Г. М. О влиянии анизотропии на напряженное состояние многослойных армированных оболочек // Прикл. механика. — 1986. — Т. 22, № 12. — С. 66...72.

9. Григолюк Э. И., Носатенко П. Я. О пространственном подходе к численному решению задач механики тонкостенных конструкций // Журн. вычисл. математики и математ. физики. — 1989. — Т. 23, № 1. — С. 151...153.

Московский автомеханический институт

Поступила в редакцию 18.07.89

Received July 18, 1989

P. Ja. Nosatenko

NUMERICAL ANALYSIS OF FREE-EDGE EFFECT IN CROSS-PLYED SHELLS

Analysis of stress concentration at the free edge of a cross-plyed laminated shell based on FEM solution of the three-dimensional problem of the theory of elasticity is presented. An integral assessment of the error in calculation of normal transverse stresses is proposed. Normal transverse stresses are shown to be compressive under loading of cylindrical shell by internal pressure. It can be suggested that the fracture at the free edge of the shell is caused by the presence of rather high transverse shear stresses.